

COMPACTIFICATION DES VARIÉTÉS DE DELIGNE-LUSZTIG

C. BONNAFÉ & R. ROQUIER

RÉSUMÉ. Nous construisons explicitement la normalisation de la compactification de Bott-Samelson-Demazure-Hansen des variétés de Deligne-Lusztig $\mathbf{X}(w)$ dans leur revêtement $\mathbf{Y}(w)$ et retrouvons ainsi un résultat de Deligne-Lusztig [DeLu, Lemma 9.13] sur la monodromie locale autour des diviseurs de la compactification.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations	2
1. Variétés de Deligne-Lusztig	2
1.A. Définition	3
1.B. Compactification de Bott-Samelson-Demazure-Hansen	5
1.C. Normalisation	6
2. Démonstration du théorème 1.5	8
2.A. Première réduction	8
2.B. Fonctions bi-invariantes sur $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$	8
2.C. Construction de la variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$: première étape	10
2.D. Construction de la variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$: deuxième étape	11
2.E. Fin de la démonstration	15
Références	17

INTRODUCTION

Dans [BoRo], nous avons étudié le prolongement de certains systèmes locaux sur les variétés de Deligne-Lusztig en vue d’une application algébrique (équivalence de Morita donnée par la décomposition de Jordan, conjecturée par Broué). Dans cette étude, nous utilisons un résultat crucial de Deligne-Lusztig sur la ramification de ces systèmes locaux [DeLu, lemme 9.13]. Une des motivations du présent travail est de fournir une alternative “explicite” au calcul local effectué dans la preuve de Deligne et Lusztig.

Plus précisément, si w est un élément du groupe de Weyl d’un groupe réductif connexe \mathbf{G} muni d’une isogénie F dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius, il lui est associé deux variétés de Deligne-Lusztig $\mathbf{X}(w)$ et $\mathbf{Y}(w)$ ainsi qu’un morphisme fini étale $\mathbf{Y}(w) \rightarrow \mathbf{X}(w)$ faisant de $\mathbf{X}(w)$ un quotient de $\mathbf{Y}(w)$ par l’action du groupe fini \mathbf{T}^F des points rationnels d’un tore maximal F -stable

\mathbf{T} de \mathbf{G} (voir [DeLu, §1] : la variété $\mathbf{Y}(w)$ y est notée $\tilde{\mathbf{X}}(w)$). Deligne et Lusztig [DeLu, lemme 9.11] ont construit une compactification lisse $\overline{\mathbf{X}}(w)$ de $\mathbf{X}(w)$ à la Bott-Samelson-Demazure-Hansen. Le but principal de cet article est de construire explicitement la *normalisation* $\overline{\mathbf{Y}}(w)$ de $\overline{\mathbf{X}}(w)$ dans $\mathbf{Y}(w)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(w) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{Y}}(w) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}(w) & \hookrightarrow & \overline{\mathbf{X}}(w). \end{array}$$

Une fois cette construction explicite réalisée, nous en déduisons les propriétés fondamentales de $\overline{\mathbf{Y}}(w)$ (voir le théorème 1.5) permettant d'en déduire une nouvelle preuve du lemme 9.13 de Deligne-Lusztig [DeLu] qui détermine la monodromie locale du revêtement le long d'une des composantes de $\overline{\mathbf{X}}(w) - \mathbf{X}(w)$. Ce lemme est un point clef dans la preuve de Deligne-Lusztig des conjectures de Macdonald associant une représentation irréductible de \mathbf{G}^F à un caractère en position générale de \mathbf{T}^F .

NOTATIONS

Tout au long de cet article, nous fixons un groupe réductif connexe \mathbf{G} défini sur une clôture algébrique \mathbb{F} du corps fini à p éléments \mathbb{F}_p , où p est un nombre premier. Nous supposons de plus que \mathbf{G} est muni d'une isogénie $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ dont une puissance est un endomorphisme de Frobenius de \mathbf{G} .

Fixons un sous-groupe de Borel F -stable \mathbf{B} de \mathbf{G} , un tore maximal F -stable \mathbf{T} de \mathbf{B} et notons \mathbf{U} le radical unipotent de \mathbf{B} . Notons $W = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ le groupe de Weyl de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} , $X(\mathbf{T})$ (resp. $Y(\mathbf{T})$) le réseau des caractères (resp. des sous-groupes à un paramètre) de \mathbf{T} , Φ (resp. Φ^\vee) le système de racines (resp. coracines) de \mathbf{G} relativement à \mathbf{T} , Δ (resp. Δ^\vee) la base de Φ (resp. Φ^\vee) associée à \mathbf{B} et Φ_+ (resp. Φ_+^\vee) l'unique système de racines (resp. coracines) positives contenant Δ (resp. Δ^\vee).

Si $\alpha \in \Phi$, on notera α^\vee sa coracine associée, $s_\alpha \in W$ la réflexion par rapport à α , \mathbf{U}_α le sous-groupe unipotent à un paramètre normalisé par \mathbf{T} associé à α , \mathbf{T}_{α^\vee} le sous-tore de \mathbf{T} image de α^\vee et \mathbf{G}_α le sous-groupe de \mathbf{G} engendré par \mathbf{U}_α et $\mathbf{U}_{-\alpha}$.

Posons $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ et $\tilde{S} = S \cup \{1\}$. Nous noterons $\ell : W \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ la fonction longueur relativement à S . Nous noterons B le groupe de tresses associé à (W, S) , de générateurs $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$. Soit $f : B \rightarrow W$ le morphisme canonique (i.e. l'unique morphisme tel que $f(s_\alpha) = s_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$) et soit $\sigma : W \rightarrow B$ l'unique application telle que $\sigma(s_\alpha) = s_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Delta$ et $\sigma(vw) = \sigma(v)\sigma(w)$ si $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$. Cette application vérifie $f \circ \sigma = \text{Id}_W$.

1. VARIÉTÉS DE DELIGNE-LUSZTIG

Le lecteur pourra trouver dans [DiMiRo] les résultats généraux sur les variétés de Deligne-Lusztig que nous utiliserons ici.

1.A. **Définition.** Si $n \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et si $g\mathbf{U}, h\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U}$, nous écrirons $g\mathbf{U} \xrightarrow{n} h\mathbf{U}$ si $g^{-1}h \in \mathbf{U}n\mathbf{U}$. Si $w \in W$ et si $g\mathbf{B}, h\mathbf{B} \in \mathbf{G}/\mathbf{B}$, nous écrirons $g\mathbf{B} \xrightarrow{w} h\mathbf{B}$ si $g^{-1}h \in \mathbf{B}w\mathbf{B}$.

Si $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$ est une suite d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ et si $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)$ désigne la suite de leurs images respectives dans W , on pose

$$\mathcal{U}(\mathbf{n}) = \{(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \mid \\ g_1\mathbf{U} \xrightarrow{n_1} g_2\mathbf{U} \xrightarrow{n_2} \dots \xrightarrow{n_{r-1}} g_r\mathbf{U} \xrightarrow{n_r} g_{r+1}\mathbf{U}\}$$

et

$$\mathcal{B}(\mathbf{w}) = \{(g_1\mathbf{B}, \dots, g_r\mathbf{B}, g_{r+1}\mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid \\ g_1\mathbf{B} \xrightarrow{w_1} g_2\mathbf{B} \xrightarrow{w_2} \dots \xrightarrow{w_{r-1}} g_r\mathbf{B} \xrightarrow{w_r} g_{r+1}\mathbf{B}\}$$

Si $t \in \mathbf{T}$ et $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \in \mathcal{U}(\mathbf{n})$, on pose

$$(g_1\mathbf{U}, g_2\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \cdot t = (g_1t\mathbf{U}, g_2^{n_1}t\mathbf{U}, \dots, g_r^{n_{r-1} \dots n_1}t\mathbf{U}, g_{r+1}^{n_r \dots n_1}t\mathbf{U}).$$

Il est alors facile de vérifier que, si $\mathbf{g} \in \mathcal{U}(\mathbf{n})$, alors $\mathbf{g} \cdot t \in \mathcal{U}(\mathbf{n})$ et cela définit une action à droite de \mathbf{T} sur $\mathcal{U}(\mathbf{n})$. De plus, le morphisme canonique $\mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ induit un morphisme

$$\pi_{\mathbf{n}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathbf{w}) \\ (g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{B}, \dots, g_r\mathbf{B}) \end{array}$$

et ce dernier induit un isomorphisme

$$(1.1) \quad \mathcal{U}(\mathbf{n})/\mathbf{T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(\mathbf{w}).$$

Posons maintenant

$$v_{\mathbf{n}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathbf{n}) & \longrightarrow & \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{U}, g_{r+1}\mathbf{U}) \end{array}$$

et

$$\beta_{\mathbf{w}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathbf{w}) & \longrightarrow & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \\ (g_1\mathbf{B}, \dots, g_{r+1}\mathbf{B}) & \longmapsto & (g_1\mathbf{B}, g_{r+1}\mathbf{B}). \end{array}$$

Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{v_{\mathbf{n}}} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{B}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{w}}} & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \end{array}$$

est commutatif (la flèche verticale de droite étant la projection canonique).

Notons \mathcal{U}_F (resp. \mathcal{B}_F) le graphe du morphisme de Frobenius $F : \mathbf{G}/\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$ (resp. $F : \mathbf{G}/\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$). Les *variétés de Deligne-Lusztig* associées à \mathbf{n} et \mathbf{w} sont respectivement définies par

$$\mathbf{Y}(\mathbf{n}) = v_{\mathbf{n}}^{-1}(\mathcal{U}_F) \quad \text{et} \quad \mathbf{X}(\mathbf{w}) = \beta_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathcal{B}_F).$$

Notons toujours $\mathbf{w} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ la conjugaison par $w_1 \cdots w_r$. Alors le groupe $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ agit sur $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$ (par restriction de l'action de \mathbf{T} sur $\mathbf{U}(\mathbf{n})$) et le morphisme canonique $\pi_{\mathbf{n}} : \mathbf{Y}(\mathbf{n}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$ obtenu par restriction de $\pi_{\mathbf{n}}$ induit un isomorphisme

$$(1.2) \quad \mathbf{Y}(\mathbf{n})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \xrightarrow{\sim} \mathbf{X}(\mathbf{w}).$$

Pour finir, notons $v_{\mathbf{n}} : \mathbf{Y}(\mathbf{n}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$ et $\beta_{\mathbf{w}} : \mathbf{X}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{B}$ les premières projections. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{v_{\mathbf{n}}} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \\ \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\beta_{\mathbf{w}}} & \mathbf{G}/\mathbf{B} \end{array}$$

est commutatif (la flèche verticale de droite étant la projection canonique).

REMARQUE 1.3 - Prolongeons l'application $\sigma : W \rightarrow B$ aux suites d'éléments de W en posant $\sigma(\mathbf{w}) = \sigma(w_1) \cdots \sigma(w_r)$. Si \mathbf{n}' est une autre suite d'éléments de $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ dont la suite des images dans W est \mathbf{w}' , et si $\sigma(\mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w}')$, alors les variétés $\mathbf{B}(\mathbf{w})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{w}')$ sont canoniquement isomorphes et les \mathbf{T} -variétés $\mathbf{U}(\mathbf{n})$ et $\mathbf{U}(\mathbf{n}')$ sont isomorphes, ces isomorphismes rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{U}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{\sim} & & \mathbf{U}(\mathbf{n}') & \\ \pi_{\mathbf{n}} \downarrow & \searrow v_{\mathbf{n}} & \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U} & \swarrow v_{\mathbf{n}'} & \downarrow \pi_{\mathbf{n}'} \\ \mathbf{B}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\sim} & & \mathbf{B}(\mathbf{w}') & \\ & \searrow \beta_{\mathbf{w}} & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} & \swarrow \beta_{\mathbf{w}'} & \end{array}$$

commutatif.

De plus, $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} = \mathbf{T}^{\mathbf{w}'^F}$ et les $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ -variétés $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$ et $\mathbf{Y}(\mathbf{n}')$ (resp. les variétés $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ et $\mathbf{X}(\mathbf{w}')$) sont isomorphes (resp. canoniquement isomorphes), les isomorphismes

rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{Y}(\mathbf{n}) & \xrightarrow{\sim} & & \mathbf{Y}(\mathbf{n}') & \\
 \downarrow \pi_{\mathbf{n}} & \searrow v_{\mathbf{n}} & & \swarrow v_{\mathbf{n}'} & \downarrow \pi_{\mathbf{n}'} \\
 & & \mathbf{G}/\mathbf{U} & & \\
 & & \downarrow & & \\
 \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\sim} & & \mathbf{X}(\mathbf{w}') & \\
 \searrow \beta_{\mathbf{w}} & & & \swarrow \beta_{\mathbf{w}'} & \\
 & & \mathbf{G}/\mathbf{B} & &
 \end{array}$$

commutatif. \square

1.B. Compactification de Bott-Samelson-Demazure-Hansen. Pour tout $\alpha \in \Delta$, on fixe un représentant \dot{s}_α de s_α dans \mathbf{G}_α . La remarque 1.3 montre que, dans le but de construire une compactification des variétés $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$ et $\mathbf{X}(\mathbf{w})$, il est suffisant de travailler sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse : Nous fixons une suite $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ d'éléments de Δ et, si $1 \leq i \leq r$, nous posons pour simplifier $s_i = s_{\alpha_i}$ et $\dot{s}_i = \dot{s}_{\alpha_i}$. Nous supposons de plus que $\mathbf{n} = (\dot{s}_1, \dots, \dot{s}_r)$ et $\mathbf{w} = (s_1, \dots, s_r)$.

Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ sont deux suites d'éléments de $\bar{S} = S \cup \{1\}$ (de même longueur), nous écrirons $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$ si, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $x_i \in \{1, y_i\}$. On pose aussi $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_r)$, où nous choisirons toujours $\dot{1} = 1$. Par exemple, $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{n}$ et, pour simplifier les notations, nous noterons $\pi_{\mathbf{x}}$, $\pi_{\dot{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}$ et $v_{\dot{\mathbf{x}}}$ les applications $\pi_{\dot{\mathbf{x}}}$, $\pi_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{v}_{\dot{\mathbf{x}}}$ et $v_{\mathbf{x}}$, et la variété $\mathbf{Y}(\dot{\mathbf{x}})$ sera notée $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$. Pour finir, on pose $I_{\mathbf{x}} = \{1 \leq i \leq r \mid x_i = 1\}$ et on définit, comme dans [BoRo, §4.4.2],

$$Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}} = \sum_{i \in I_{\mathbf{x}}} \mathbb{Z} \, s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^\vee).$$

Bott-Samelson, Demazure et Hansen ont construit une compactification lisse $\bar{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$ de $\mathcal{B}(\mathbf{w})$:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) &= \coprod_{\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}} \mathcal{B}(\mathbf{x}) \\
 &= \{(g_1 \mathbf{B}, \dots, g_{r+1} \mathbf{B}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{B})^{r+1} \mid \forall 1 \leq i \leq r, g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{B}\}.
 \end{aligned}$$

Alors $\bar{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$ est lisse, projective, irréductible et contient $\mathcal{B}(\mathbf{w})$ comme sous-variété ouverte. Posons

$$\begin{aligned}
 \bar{\beta}_{\mathbf{w}} : \quad & \bar{\mathcal{B}}(\mathbf{w}) & \longrightarrow & \mathbf{G}/\mathbf{B} \times \mathbf{G}/\mathbf{B} \\
 & (g_1 \mathbf{B}, \dots, g_{r+1} \mathbf{B}) & \longmapsto & (g_1 \mathbf{B}, g_{r+1} \mathbf{B}).
 \end{aligned}$$

Alors $\overline{\beta}_{\mathbf{w}}$ prolonge $\beta_{\mathbf{w}}$ (et en fait coïncide avec $\beta_{\mathbf{x}}$ sur $\mathcal{B}(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$). On pose alors, suivant [DeLu, §9.10],

$$\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) = \overline{\beta}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathcal{B}_F).$$

Notons que

$$(1.4) \quad \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) = \coprod_{\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}} \mathbf{X}(\mathbf{x}).$$

Alors $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ est une variété lisse, projective et contient $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ comme sous-variété ouverte [DeLu, lemme 9.11].

1.C. Normalisation. Avant de parler de la compactification de $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$ et avant d'énoncer le résultat principal de cet article, nous aurons besoin de quelques notations. Tout d'abord, fixons un entier naturel non nul d et une puissance q de p tels que, pour tout $t \in \mathbf{T}$ et pour tout $w \in W$, on ait $(wF)^d(t) = t^q$. On fixe une racine primitive $(q-1)$ -ième de l'unité ζ dans \mathbf{G}_m . On note encore $\mathbf{w}F : Y(\mathbf{T}) \rightarrow Y(\mathbf{T})$ l'endomorphisme de groupes induits par l'endomorphisme $\mathbf{w}F : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ et on pose

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{w}} : Y(\mathbf{T}) &\longrightarrow \mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \\ \lambda &\longmapsto N_{F^d/\mathbf{w}F}(\lambda(\zeta)), \end{aligned}$$

où $N_{F^d/\mathbf{w}F} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, $t \mapsto t \cdot \mathbf{w}F t \cdots (\mathbf{w}F)^{d-1} t$. Rappelons que $N_{\mathbf{w}}$ est surjective et induit un isomorphisme

$$Y(\mathbf{T})/(\mathbf{w}F - 1)(Y(\mathbf{T})) \xrightarrow{\sim} \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}.$$

Le morphisme $\pi_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$ étant fini, on peut définir la *normalisation* $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ de $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ dans $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$: c'est l'unique variété normale \mathbf{Z} contenant $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ comme sous-variété ouverte dense et munie d'un morphisme fini $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \mathbf{Z} \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ prolongeant $\pi_{\mathbf{w}}$. Le morphisme $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ étant fini, $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est une variété projective. Le but de cet article est de la construire explicitement et d'en déduire les propriétés suivantes :

Théorème 1.5. *Avec les notations précédentes, on a :*

- (a) *La variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est une variété projective, normale, rationnellement lisse, de lieu singulier contenu dans*

$$\overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1} \left(\bigcup_{\substack{\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w} \\ |I_{\mathbf{x}}| \geq 2}} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \right).$$

- (b) *La variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est munie d'une action de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ prolongeant l'action sur $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ et telle que $\overline{\pi}_{\mathbf{w}}$ induit un isomorphisme $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$.*
- (c) *Si $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$, le stabilisateur dans $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ d'un élément de $\overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ est égal à $N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$.*

- (d) Si $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$, alors il existe un morphisme canonique $i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) & \xrightarrow{i_{\mathbf{x}}} & \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) \\ & \searrow \pi_{\mathbf{x}} & \downarrow \bar{\pi}_{\mathbf{w}} \\ & & \mathbf{X}(\mathbf{x}) \end{array}$$

et induisant un isomorphisme $\mathbf{Y}(\mathbf{x})/N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}) \xrightarrow{\sim} \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$.

Rassemblons les constructions précédentes dans le diagramme commutatif suivant :

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) & \xhookrightarrow{i_{\mathbf{w}}} & \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) & \xleftarrow{\quad} & \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) & \xleftarrow{i_{\mathbf{x}}} & \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \\ \downarrow \pi_{\mathbf{w}} & & \downarrow \bar{\pi}_{\mathbf{w}} & & \downarrow & \searrow \pi_{\mathbf{x}} & \\ \mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xhookrightarrow{\quad} & \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) & \xleftarrow{\quad} & \mathbf{X}(\mathbf{x}) & & \end{array}$$

REMARQUE 1.7 - L'énoncé (c) du théorème précédent montre que

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) \simeq \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) / (\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} / N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}))$$

tandis que l'énoncé (d) montre que

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) \simeq \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) / (\mathbf{T}^{\mathbf{x}^F} / N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})).$$

Ceci n'est pas une incohérence car

$$\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} / N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}}) \simeq \mathbf{T}^{\mathbf{x}^F} / N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$$

d'après [BoRo, proposition 4.4 (4)]. \square

La section suivante est consacrée à la démonstration du théorème 1.5. Avant cela, montrons que ce théorème fournit une autre preuve de [DeLu, lemme 9.13]. Tout d'abord, si $1 \leq i \leq r$, notons $\mathbf{w}(i) = (s_1, \dots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \dots, s_r) \preccurlyeq \mathbf{w}$. Alors

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \setminus \mathbf{X}(\mathbf{w}) = \bigcup_{i=1}^r \overline{\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))}$$

et les $\overline{\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))}$ sont des diviseurs lisses à croisements normaux.

On en déduit alors [DeLu, Lemma 9.13]:

Corollaire 1.8. *Le $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ -torseur $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ (au-dessus de $\mathbf{X}(\mathbf{w})$) se ramifie le long de $\mathbf{X}(\mathbf{w}(i))$ de la même façon que le changement de base sous $s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^{\vee}) : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{T}$ du revêtement de Lang $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, $t \mapsto t^{-1} \cdot \mathbf{w}^F t$, se ramifie en 0.*

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5

2.A. Première réduction. La preuve que nous proposons du théorème 1.5 passe par une construction explicite de $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. Cependant, pour simplifier cette construction, il convient de remarquer qu'en raisonnant comme dans [BoRo, §6.2], on peut supposer (et nous le ferons) que l'hypothèse suivante est satisfaite :

Hypothèse. *Dorénavant, et ce jusqu'à la fin de §2, nous supposons que le groupe dérivé de \mathbf{G} est simplement connexe.*

Notons que ceci implique que $\mathbf{G}_\alpha \simeq \mathbf{SL}_2$ et que α^\vee est injective pour toute racine α (en particulier, $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\alpha^\vee$ est sans torsion).

2.B. Fonctions bi-invariantes sur $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$. Avant de procéder à la construction explicite de $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires sur les fonctions régulières sur $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$ invariantes par l'action de $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ par translations à gauche et à droite (ici, α est une racine simple). Commençons par étudier le cas du groupe \mathbf{SL}_2 .

Notons

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbf{SL}_2 &\longrightarrow \mathbf{A}^1 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto c \end{aligned}$$

et notons \mathbf{U}_2 le sous-groupe de \mathbf{SL}_2 formé des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Il est alors facile de vérifier que φ est invariante par l'action de $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$ sur \mathbf{SL}_2 (par translations à gauche et à droite). En fait, en notant \mathbf{B}_2 le groupe des matrices triangulaires supérieures de \mathbf{SL}_2 , on a :

Proposition 2.1. *Soient $g \in \mathbf{SL}_2$, $z \in \mathbf{G}_m$, $t = \text{diag}(z, z^{-1})$ et $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Alors :

- (a) $\mathbb{F}[\mathbf{SL}_2]^{\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2} = \mathbb{F}[\varphi]$.
- (b) $\varphi(tg) = z^{-1}\varphi(g)$ et $\varphi(gt) = z\varphi(g)$.
- (c) $\varphi(t^{-1}g^st) = \varphi(g)$.
- (d) On a $\varphi(g) = 0$ si et seulement si $g \in \mathbf{B}_2$.
- (e) On a $\varphi(g) = 1$ si et seulement si $g \in \mathbf{U}_2 s \mathbf{U}_2$.

Démonstration. (a) Soit $\psi \in \mathbb{F}[\mathbf{SL}_2]^{\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{F}[T]$ tel que, pour tout $c \in \mathbf{A}^1$, $\psi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = P(c)$. Alors $\psi - P(\varphi)$ est une fonction $\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_2$ -invariante sur \mathbf{SL}_2 et nulle sur ${}^s\mathbf{U}_2$. Par conséquent, elle est nulle sur $\mathbf{U}_2 {}^s\mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2$: or, cet ensemble est dense dans \mathbf{SL}_2 , donc $\psi - P(\varphi) = 0$.

(b), (c) (d) et (e) découlent de calculs élémentaires. □

Revenons aux groupes $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$. Fixons une racine simple $\alpha \in \Delta$. Choisissons un isomorphisme $\aleph_\alpha : \mathbf{SL}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_\alpha$ de sorte que

$$\aleph_\alpha(\mathbf{U}_2) = \mathbf{U}_\alpha, \quad \aleph_\alpha(s) = \dot{s}_\alpha, \quad \text{et} \quad \aleph_\alpha \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \alpha^\vee(z)$$

pour tout $z \in \mathbf{G}_m$. Notons \mathbf{U}_α^* le sous-groupe de \mathbf{U} engendré par la famille $(\mathbf{U}_\beta)_{\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha\}}$. On a alors $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} = \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}_\alpha^* = \mathbf{G}_\alpha \ltimes \mathbf{U}_\alpha^*$. On note $\tau_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \ltimes \mathbf{U}_\alpha^* \rightarrow \mathbf{G}_\alpha$ la projection naturelle. Notons pour finir φ_α la composition $\varphi \circ \aleph_\alpha^{-1} \circ \tau_\alpha : \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{A}^1$, de sorte que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U} & \xrightarrow{\tau_\alpha} & \mathbf{G}_\alpha & \xrightarrow{\aleph_\alpha^{-1}} & \mathbf{SL}_2 \\ & \searrow \varphi_\alpha & & & \downarrow \varphi \\ & & & & \mathbf{A}^1 \end{array}$$

soit commutatif. C'est une fonction régulière sur $\mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$. Notons de plus que

$$(2.2) \quad \varphi_\alpha(\dot{s}_\alpha) = 1,$$

car $\varphi(s) = 1$.

Proposition 2.3. *Soient $g \in \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$, $u, v \in \mathbf{U}$, $t \in \mathbf{T}$ et $z \in \mathbf{G}_m$. Alors*

- (a) $\varphi_\alpha(ugv) = \varphi_\alpha(g)$.
- (b) $\varphi_\alpha(g\alpha^\vee(z)) = z\varphi_\alpha(g)$ et $\varphi_\alpha(\alpha^\vee(z)g) = z^{-1}\varphi_\alpha(g)$.
- (c) $t^{-1}g {}^{s_\alpha}t \in \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$ et $\varphi_\alpha(t^{-1}g {}^{s_\alpha}t) = \varphi(g)$.
- (d) $\varphi_\alpha(g) = 0$ si et seulement si $g \in \mathbf{B}$ (c'est-à-dire si et seulement si $g \in \mathbf{T}_{\alpha^\vee} \mathbf{U} = \mathbf{B} \cap \mathbf{G}_\alpha \mathbf{U}$).
- (e) $\varphi_\alpha(g) = 1$ si et seulement si $g \in \mathbf{U}\dot{s}_\alpha \mathbf{U}$.

Démonstration. Les assertions (a), (b), (d) et (e) découlent facilement de la proposition 2.1 et du fait que \mathbf{U}_α^* est normalisé par \mathbf{U} et \mathbf{G}_α . Seul le (c) nécessite un commentaire. Tout d'abord, comme \mathbf{T} est engendré par $\text{Ker } \alpha$ et \mathbf{T}_{α^\vee} , il suffit de montrer le résultat dans les deux cas suivants : $\alpha(t) = 1$ ou $t = \alpha^\vee(z)$, $z \in \mathbf{G}_m$. Le deuxième cas se traite immédiatement par la proposition 2.1. Dans le premier cas, on remarque que t commute avec \mathbf{G}_α (et donc ${}^{s_\alpha}t = t$) et, comme il normalise \mathbf{U}_α^* , on a $\tau_\alpha(t^{-1}g {}^{s_\alpha}t) = \tau_\alpha(g)$. \square

2.C. Construction de la variété $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$: première étape. Posons pour commencer

$$\tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) = \{(g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \mid \forall 1 \leq i \leq r, g_i^{-1}g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i}\mathbf{U}\}$$

et notons

$$\tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$$

l'application canonique. La variété $\tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w})$ est irréductible, quasi-affine, lisse et de dimension $2r + \dim \mathbf{G}/\mathbf{U}$.

Nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{w}} : \quad & \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) && \longrightarrow \mathbf{A}^r \\ & (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}) && \longmapsto (\varphi_{\alpha_1}(g_1^{-1}g_2), \dots, \varphi_{\alpha_r}(g_r^{-1}g_{r+1})). \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3 (a), l'application $\varphi_{\mathbf{w}}$ est bien définie et est un morphisme de variétés. Fixons maintenant un r -uplet d'entiers naturels non nuls $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)$, notons $f_{\mathbf{d}} : \mathbf{A}^r \rightarrow \mathbf{A}^r$, $(\xi_1, \dots, \xi_r) \mapsto (\xi_1^{d_1}, \dots, \xi_r^{d_r})$ et posons

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{U}}(\mathbf{w}) \times \mathbf{A}^r \mid \varphi_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) = f_{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi})\}.$$

Proposition 2.4. *La variété $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}}(\mathbf{w})$ est lisse, de dimension $2r + \dim \mathbf{G}/\mathbf{U}$.*

Démonstration. Si $\alpha \in \Delta$ et $d \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathcal{U}_{\alpha,d} = \{(g, \xi) \in \mathbf{G}_{\alpha}\mathbf{U}/\mathbf{U} \times \mathbf{A}^1 \mid \varphi_{\alpha}(g) = \xi^d\}.$$

Les isomorphismes $\aleph_{\alpha} : \mathbf{G}_{\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathbf{SL}_2$ et $\mathbf{SL}_2/\mathbf{U}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^2 - \{(0,0)\}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, c)$ induisent un isomorphisme $\mathbf{G}_{\alpha}\mathbf{U}/\mathbf{U} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et finalement

$$\mathcal{U}_{\alpha,d} \xrightarrow{\sim} \{(x, y, \xi) \in \mathbf{A}^3 \mid (x, y) \neq (0,0) \text{ et } y = \xi^d\} \simeq \mathbf{A}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

En particulier, $\mathcal{U}_{\alpha,d}$ est lisse.

Soient $\mathbf{w}_i = (s_1, \dots, s_i)$ et $\mathbf{d}_i = (d_1, \dots, d_i)$. On dispose d'une suite de morphismes canoniques

$$\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}}(\dot{\mathbf{w}}) = \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}_r}(\dot{\mathbf{w}}_r) \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}_{r-1}}(\dot{\mathbf{w}}_{r-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}_1}(\dot{\mathbf{w}}_1) \longrightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U}$$

(consistant à chaque étape à oublier le dernier terme de \mathbf{g} et $\boldsymbol{\xi}$) qui sont des fibrations successives de fibres successivement isomorphes à des variétés de la forme $\mathcal{U}_{\alpha,d}$, donc lisses. La lissité de $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{d}}(\dot{\mathbf{w}})$ s'en déduit. \square

2.D. Construction de la variété $\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$: deuxième étape. Si $1 \leq i \leq r$, il existe un unique $\lambda_i \in Y(\mathbf{T})$ et un unique $m_i \in \mathbb{Z}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_i - \mathbf{w}F(\lambda_i) = m_i s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee), \\ m_i > 0, \\ Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i \text{ est sans torsion.} \end{cases}$$

Ceci découle de l'injectivité de $\text{Id}_{Y(\mathbf{T})} - \mathbf{w}F$ et du fait que $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ est sans torsion.

REMARQUE 2.5 - Les m_i ne sont pas divisibles par p car l'égalité qui les définit implique que

$$(2.6) \quad m_i N_{F^d/\mathbf{w}F}(s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_i^\vee)) = (q-1)\lambda_i,$$

donc

$$(2.7) \quad m_i \text{ divise } q-1,$$

car $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i$ est sans torsion. \square

Posons alors $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ et

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}) \mid \mathbf{v}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) \in \mathcal{U}_F\}.$$

En d'autres termes, $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est formée des éléments $(g_1 \mathbf{U}, \dots, g_{r+1} \mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1} \times \mathbf{A}^r$ tels que

$$(2.8) \quad \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U} \text{ et } \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1} g_{i+1}) = \xi_i^{m_i}; \\ g_{r+1} \mathbf{U} = F(g_1) \mathbf{U}. \end{cases}$$

Rappelons le lemme suivant :

Lemme 2.9 (Deligne-Lusztig). *Soient \mathbf{H} un sous-groupe fermé F -stable de \mathbf{G} , \mathbf{Z} une \mathbf{G} -variété lisse et $\theta : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H} \times \mathbf{G}/\mathbf{H}$ un morphisme \mathbf{G} -équivariant. Alors le graphe de $F : \mathbf{G}/\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{H}$ est transverse à θ .*

Démonstration. Ce lemme est montré dans [DeLu, Preuve du lemme 9.11] dans le cas où $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ mais la preuve reste valable mot pour mot dans le cas général. \square

Le morphisme $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{G}/\mathbf{U} \times \mathbf{G}/\mathbf{U}$, $(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto \mathbf{v}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g})$ est \mathbf{G} -équivariant et la variété $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathbf{m}}(\mathbf{w})$ est lisse d'après la proposition 2.4. On déduit donc du lemme 2.9 que

$$(2.10) \quad \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \text{ est lisse, purement de dimension } 2r.$$

Notons

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) &\longrightarrow \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) &\longmapsto \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant construire une action à droite de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r$ sur $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. Tout d'abord posons, pour tout $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$,

$$\begin{cases} \gamma_1(\mathbf{z}) = \lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r) \\ \gamma_{i+1}(\mathbf{z}) = {}^{s_i}\gamma_i(\mathbf{z}) \alpha_i^\vee(z_i^{m_i}), \quad \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, r\}. \end{cases}$$

Alors

$$(2.11) \quad F(\gamma_1(\mathbf{z})) = \gamma_{r+1}(\mathbf{z}).$$

Démonstration. En effet,

$$\gamma_{r+1}(\mathbf{z}) = {}^{\mathbf{w}^{-1}}\gamma_1(\mathbf{z}) \, {}^{s_r \cdots s_2}\alpha_1^\vee(z_1^{m_1}) \, {}^{s_r \cdots s_3}\alpha_2^\vee(z_2^{m_2}) \cdots \alpha_r^\vee(z_r^{m_r})$$

et donc

$$\begin{aligned} {}^{\mathbf{w}^F}\gamma_1(\mathbf{z})^{-1} {}^{\mathbf{w}}\gamma_{r+1}(\mathbf{z}) &= (\lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r))^{-1} {}^{\mathbf{w}^F}(\lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r)) \\ &\quad \times \alpha_1^\vee(z_1^{-m_1}) \, {}^{s_1}\alpha_2^\vee(z_2^{-m_2}) \cdots {}^{s_1 \cdots s_{r-1}}\alpha_r^\vee(z_r^{-m_r}) = 1, \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la définition des λ_i . \square

Si $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$, si $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ et si $(g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, on pose

$$\begin{aligned} (g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) * \mathbf{z} = \\ (g_1\gamma_1(\mathbf{z})\mathbf{U}, \dots, g_r\gamma_r(\mathbf{z})\mathbf{U}, F(g_1)\gamma_{r+1}(\mathbf{z})\mathbf{U}; z_1\xi_1, \dots, z_r\xi_r) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (g_1\mathbf{U}, \dots, g_r\mathbf{U}, F(g_1)\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r) * t = \\ (g_1t\mathbf{U}, g_2{}^{s_1}t\mathbf{U}, \dots, g_r{}^{s_{r-1} \cdots s_1}t\mathbf{U}, F(g_1) {}^{s_r \cdots s_1}t\mathbf{U}; \xi_1, \dots, \xi_r). \end{aligned}$$

Proposition 2.12. *Les formules ci-dessus définissent une action de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r$ sur la variété $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. De plus, le morphisme $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ induit un isomorphisme $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/(\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$.*

Démonstration. Montrons que l'on a bien défini une action. Soient $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F}$ et $\mathbf{z} \in (\mathbf{G}_m)^r$. Il suffit de montrer que $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t$ et $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z}$ appartiennent à $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ (les axiomes des actions de groupes sont clairement vérifiés). Écrivons

$$\mathbf{g} = (g_1\mathbf{U}, \dots, g_{r+1}\mathbf{U}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_r) \quad \text{et} \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r).$$

Commençons par montrer que $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. Posons pour simplifier $t_i = {}^{s_{i-1} \cdots s_1}t$. On a alors

$$(g_i t_i)^{-1} (g_{i+1} t_{i+1}) = t_i^{-1} (g_i^{-1} g_{i+1}) {}^{s_i} t_i$$

et donc, d'après la proposition 2.3 (c), on a $(g_i t_i)^{-1} (g_{i+1} t_{i+1}) \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}$ et

$$\varphi_{\alpha_i}((g_i t_i)^{-1} (g_{i+1} t_{i+1})) = \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1} g_{i+1}) = \xi_i^{m_i}.$$

D'autre part, puisque $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$, on a $F(g_1 t_1) \mathbf{U} = g_{r+1} {}^F t \mathbf{U} = g_{r+1} {}^{\mathbf{w}^{-1}} t \mathbf{U} = g_{r+1} t_{r+1} \mathbf{U}$. Donc $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$.

Montrons maintenant que $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z} \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. D'une part, on a

$$(g_i \gamma_i(\mathbf{z}))^{-1} (g_{i+1} \gamma_{i+1}(\mathbf{z})) = \gamma_i(\mathbf{z})^{-1} (g_i^{-1} g_{i+1}) {}^{s_i} \gamma_i(\mathbf{z}) \alpha_i^\vee(z_i^{m_i}),$$

donc $(g_i \gamma_i(\mathbf{z}))^{-1} (g_{i+1} \gamma_{i+1}(\mathbf{z})) \in \mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}$ et son image par φ_{α_i} est $z_i^{m_i} \varphi_{\alpha_i}(g_i^{-1} g_{i+1}) = (z_i \xi_i)^{m_i}$ (voir la proposition 2.3 (b) et (c)). D'autre part, d'après 2.11, on obtient $g_{r+1} \gamma_{r+1}(\mathbf{z}) \mathbf{U} = F(g_1 \gamma_1(\mathbf{z})) \mathbf{U}$. Donc $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z} \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$.

Il nous reste à montrer la dernière assertion de la proposition. Tout d'abord, il est clair que les $(\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r)$ -orbites sont contenues dans les fibres de $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$. Réciproquement, montrons que les fibres de $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ sont des orbites. Soient donc $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi})$ et $(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}')$ deux éléments de $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ tels que $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) = \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}')$. Écrivons

$$\mathbf{g} = (g_1 \mathbf{U}, \dots, g_{r+1} \mathbf{U}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_r),$$

$$\mathbf{g}' = (g'_1 \mathbf{U}, \dots, g'_{r+1} \mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi}' = (\xi'_1, \dots, \xi'_r).$$

Par hypothèse, il existe $t_i \in \mathbf{T}$ tels que $g'_i \mathbf{U} = g_i t_i \mathbf{U}$. Mais, puisque $g_i^{-1} g'_{i+1}$ et $g_i^{-1} g_{i+1}$ appartiennent à $\mathbf{G}_{\alpha_i} \mathbf{U}$, cela montre que $t_i^{-1} t_{i+1}$ appartient à $\mathbf{T}_{\alpha_i^\vee}$, ou encore que ${}^{s_i} t_i^{-1} t_{i+1}$ appartient à $\mathbf{T}_{\alpha_i^\vee}$. Soit donc $z_i \in \mathbf{G}_m$ tel que $t_{i+1} = {}^{s_i} t_i \alpha_i^\vee(z_i^{m_i})$. Posons $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r)$. Alors, quitte à remplacer $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi})$ par $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * \mathbf{z}$, et quitte à multiplier z_i par une racine m_i -ième de l'unité, on peut supposer que $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}'$ et $t_{i+1} = {}^{s_i} t_i$. Mais alors, le fait que $g_{r+1} \mathbf{U} = F(g_1) \mathbf{U}$ et $g'_{r+1} \mathbf{U} = F(g'_1) \mathbf{U}$ impose que $t_{r+1} = F(t_1)$, et donc que $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$. Par conséquent, $(\mathbf{g}'; \boldsymbol{\xi}') = (\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) * t$.

Les variétés $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ et $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ étant lisses et les fibres de $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ étant des $(\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \times (\mathbf{G}_m)^r)$ -orbites, il suffit maintenant de montrer que $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ est séparable [Bor, proposition 6.6]. Pour cela, notons $\Pi(\boldsymbol{\xi}) = \xi_1 \cdots \xi_r$ si $(\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathbf{A}^r$ et posons

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \mid \Pi(\boldsymbol{\xi}) \neq 0\}.$$

Notons $\tilde{\iota}_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, $\mathbf{g} \mapsto (\mathbf{g}; 1, \dots, 1)$. Le fait que $\tilde{\iota}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ découle de ce que $\varphi_{\alpha_i}(s_i) = 1$ d'après 2.2. Alors $\tilde{\mathbf{Y}}_o(\mathbf{w})$ est un ouvert de $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ contenant $\tilde{\iota}_{\mathbf{w}}(\mathbf{Y}(\mathbf{w}))$ et son image par $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$ est $\mathbf{X}(\mathbf{w})$ (voir la proposition 2.3 (d)). Le morphisme $\mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$ étant séparable, il suffit de remarquer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \times (\mathbf{G}_m)^r & \longrightarrow & \tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \mathbf{z}) & \longmapsto & \tilde{\iota}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) * \mathbf{z} \end{array}$$

est un isomorphisme de variétés : cela vient du fait que, si $\mathbf{g} \in (\mathbf{G}/\mathbf{U})^{r+1}$ vérifie $(\mathbf{g}; 1, \dots, 1) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, alors $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{w})$ d'après la proposition 2.3 (e). \square

On a donc un diagramme commutatif, où les flèches verticales sont des morphismes quotients par les actions des groupes indiqués :

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \\
(\mathbf{G}_m)^r \downarrow & & \downarrow \mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r \\
\mathbf{Y}(\mathbf{w}) & & \\
\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{X}(\mathbf{w}) & \xrightarrow{\text{ouvert}} & \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})
\end{array}$$

Si I est une partie de $\{1, 2, \dots, r\}$, on pose

$$\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}) = \{(\mathbf{g}; \xi_1, \dots, \xi_r) \in \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \mid \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, i \in I \iff \xi_i = 0\}$$

et

$$H_I = \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r \mid \gamma_1(\mathbf{z}) = \dots = \gamma_{r+1}(\mathbf{z}) = 1 \text{ et } \forall i \notin I, z_i = 1\}.$$

Alors $\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$ est une sous-variété localement fermée de $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$, stable par l'action de $\mathbf{T}^{\mathbf{w}^F} \times (\mathbf{G}_m)^r$, et

(2.13) *le stabilisateur d'un élément de $\tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$ dans $(\mathbf{G}_m)^r$ est égal à H_I .*

D'autre part, il résulte facilement de la proposition 2.3 (d) que, si $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$, alors

$$(2.14) \quad \tilde{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) = \tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}).$$

En particulier, on a une partition en sous-variétés localement fermées

$$(2.15) \quad \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \coprod_{I \subset \{1, 2, \dots, r\}} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}).$$

Proposition 2.16. *Soit I une partie de $\{1, 2, \dots, r\}$. Alors :*

- (a) H_I est un groupe fini, contenu dans $H_{\{1, 2, \dots, r\}}$.
- (b) Si $|I| \leq 1$, alors $H_I = 1$.

Démonstration. (a) Il est tout d'abord évident que H_I est contenu dans $H_{\{1, 2, \dots, r\}}$. Il suffit donc de montrer que ce dernier est fini. Or, si $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in H_{\{1, 2, \dots, r\}}$, alors puisque $\gamma_i(\mathbf{z}) = \gamma_{i+1}(\mathbf{z}) = 1$, il résulte de la définition des γ_i que $\alpha_i^{\vee}(z_i^{m_i}) = 1$. Puisque α_i^{\vee} est injectif (car $\mathbf{G}_{\alpha_i} \simeq \mathbf{SL}_2$), on en déduit que z_i est une racine m_i -ième de l'unité. D'où le résultat.

(b) Si $I = \emptyset$, alors $H_I = 1$ par définition. Si $I = \{i\}$ et si $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in H_I$, alors $z_1 = \dots = z_{i-1} = z_{i+1} = \dots = z_r = 1$. Mais de plus $\gamma_1(\mathbf{z}) = 1$, ce qui implique que $\lambda_i(z_i) = 1$. Donc $z_i = 1$ car, puisque $Y(\mathbf{T})/\mathbb{Z}\lambda_i$ est sans torsion, le morphisme $\lambda_i : \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{T}$ est injectif. \square

Posons maintenant

$$\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/(\mathbf{G}_m)^r,$$

notons $\text{proj}_{\mathbf{w}} : \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ la projection canonique et notons $\overline{\pi}_{\mathbf{w}} : \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ le morphisme de variétés induit par $\tilde{\pi}_{\mathbf{w}}$. Si $I \subset \{1, 2, \dots, r\}$, on note ξ_I la fonction caractéristique du complémentaire de I , que l'on voit comme un élément de \mathbf{A}^r . On pose aussi $\overline{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}) = \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})/(\mathbf{G}_m)^r \subset \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$. On a bien sûr

$$\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) = \coprod_{I \subset \{1, 2, \dots, r\}} \overline{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w}).$$

Soit $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$. Comme dans la preuve de la proposition 2.12, on montre qu'on a un morphisme bien défini

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{G}_m)^r / H_{I_{\mathbf{x}}} &\rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \\ (g, z) &\mapsto (g, \xi_{I_{\mathbf{x}}}) * z \end{aligned}$$

et que c'est un isomorphisme. En particulier, $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$ est lisse.

On définit alors

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) &\longrightarrow \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{g} &\longmapsto \text{proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}, \xi_{I_{\mathbf{x}}}). \end{aligned}$$

Il est clair que

$$(2.17) \quad \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) = \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}).$$

Le morphisme canonique $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$ est le quotient par l'action libre de $(\mathbf{G}_m)^r / H_{I_{\mathbf{x}}}$ et $\tilde{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$ est lisse, donc $\overline{\mathbf{Y}}_{I_{\mathbf{x}}}(\mathbf{w})$ est lisse.

Nous allons montrer que $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est la normalisation de $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ dans $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ et que les énoncés (a), (b), (c) et (d) du théorème 1.5 sont vérifiés.

2.E. Fin de la démonstration. Dans la preuve de la proposition 2.12, il a été remarqué que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \times (\mathbf{G}_m)^r &\longrightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) \\ (\mathbf{g}, \mathbf{z}) &\longmapsto \tilde{\iota}_{\mathbf{w}}(\mathbf{g}) * \mathbf{z} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de variétés. Cela montre que $i_{\mathbf{w}} : \mathbf{Y}(\mathbf{w}) \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est une immersion ouverte, d'image $\overline{\mathbf{Y}}_{\emptyset}(\mathbf{w}) = \overline{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{w}))$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y}(w) & \xhookrightarrow{i_{\mathbf{w}}} & \overline{\mathbf{Y}}(w) \\ \pi_{\mathbf{w}} \downarrow & & \downarrow \overline{\pi}_{\mathbf{w}} \\ \mathbf{X}(w) & \xhookrightarrow{\quad} & \overline{\mathbf{X}}(w). \end{array}$$

D'autre part, par construction, $i_{\mathbf{w}}$ est $\mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ -équivariant et il résulte de la proposition 2.12 que $\pi_{\mathbf{w}}$ induit un isomorphisme de variétés

$$(2.18) \quad \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/\mathbf{T}^{\mathbf{w}F} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w}).$$

D'autre part, posons $H = H_{\{1,2,\dots,r\}}$. Alors $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H$ est une variété normale et rationnellement lisse (car $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est lisse et H est fini) et le groupe $(\mathbf{G}_m)^r/H$ agit librement sur $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H$. Donc

$$(2.19) \quad \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \text{ est une variété normale et rationnellement lisse}$$

et

$$(2.20) \quad \text{le morphisme } \pi_{\mathbf{w}} \text{ est un morphisme fini.}$$

Par conséquent, $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$ est bien la normalisation de $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ dans $\mathbf{Y}(\mathbf{w})$.

Preuve du (a). Puisque $\pi_{\mathbf{w}}$ est un morphisme fini (voir 2.20), c'est un morphisme projectif. La variété $\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{w})$ étant projective, $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est aussi projective.

Le morphisme canonique $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}} \rightarrow \overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est lisse et la description du lieu singulier de $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ se ramène donc au cas de la variété $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}}$. Puisque $H_{\{1,\dots,r\}}$ agit librement sur $\coprod_{|I| \leq 1} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$ (d'après la proposition 2.16 (b)), on obtient la dernière assertion de (a).

REMARQUE - Le lieu de ramification du morphisme quotient $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}) \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}}$ est de codimension > 1 . La variété $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ est lisse, donc le théorème de pureté du lieu de ramification [SGA1, X, Théorème 3.1] montre que le lieu singulier de $\tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})/H_{\{1,\dots,r\}}$ est l'image de $\coprod_{|H_I| > 1} \tilde{\mathbf{Y}}_I(\mathbf{w})$.

Il existe des exemples où la variété normale $\overline{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ n'est pas lisse : si $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_3$, si F est l'endomorphisme de Frobenius déployé standard sur le corps fini \mathbb{F}_{q_0} , et si s et t sont les deux réflexions simples, alors la variété $\overline{\mathbf{Y}}(s, t)$ n'est pas lisse car le groupe fini $H_{1,2}$ est cyclique d'ordre $1 + q_0 + q_0^2$. \square

Preuve du (b). Cela a été démontré dans 2.18.

Preuve du (c). Soit $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{w}F}$ et soit $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$. Alors t stabilise un élément de $\pi_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ si et seulement si il existe $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$ tel que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on ait

$$\gamma_i(\mathbf{z}) = s_{i-1} \cdots s_1 t \text{ pour tout } i \text{ et } z_i = 1 \text{ pour } i \notin I_{\mathbf{x}}.$$

Si tel est le cas, on a $z_i^{m_i} = 1$ pour tout i et $t = \lambda_1(z_1) \cdots \lambda_r(z_r)$. D'après 2.7, il existe donc $e_i \in \mathbb{Z}$ tel que $z_i = (\zeta^{(q-1)/m_i})^{e_i}$, donc

$$t = N_{\mathbf{w}} \left(\sum_{i \in I_{\mathbf{x}}} e_i s_1 \cdots s_{i-1} (\alpha_i^{\vee}) \right)$$

d'après 2.6. Donc $t \in N_{\mathbf{w}}(Y_{\mathbf{w}, \mathbf{x}})$. La réciproque se montre de façon analogue.

Preuve du (d). Soit $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$. On a construit un morphisme canonique $i_{\mathbf{x}} : \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$. Tout d'abord, la surjectivité de $i_{\mathbf{x}}$ résulte du fait suivant : si $(\mathbf{g}; \boldsymbol{\xi}) \in \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$ et si $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{w}$, alors $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_{I_{\mathbf{x}}}$ si et seulement si $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{x})$ (voir la proposition 2.3 (e)). De plus, puisque $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}} \circ i_{\mathbf{x}} = \pi_{\mathbf{x}}$ (où $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}}$ désigne la restriction de $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}$ à $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x})$), le morphisme $i_{\mathbf{x}}$ est séparable. Les variétés $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ et $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{-1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}))$ étant lisses, il suffit de montrer que les fibres de $i_{\mathbf{x}}$ sont les $N_{\mathbf{x}}(Y_{\mathbf{w},\mathbf{x}})$ -orbites.

Écrivons $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$, où $x_i \in \{1, s_i\}$ pour tout i . Comme $\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}} \circ i_{\mathbf{x}} = \pi_{\mathbf{x}}$, les fibres de $(\bar{\pi}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{x}})^{-1}$ sont contenues dans des $\mathbf{T}^{\mathbf{x}F}$ -orbites. Soit $t \in \mathbf{T}^{\mathbf{x}F}$ et soit $\mathbf{g} \in \mathbf{Y}(\mathbf{x})$. Alors $i_{\mathbf{x}}(\mathbf{g} \cdot t) = i_{\mathbf{x}}(\mathbf{g})$ si et seulement si il existe $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_r)$ dans $(\mathbf{G}_m)^r$ tel que

$$(*) \quad \begin{cases} \forall 1 \leq i \leq r+1, & x_{i-1} \cdots x_1 t = \gamma_i(\mathbf{z}), \\ \forall i \notin I_{\mathbf{x}}, & z_i = 1. \end{cases}$$

Posons, comme dans [BoRo, §4.4.3],

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}} &= \{(a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbf{T}^{r+1} \mid a_{r+1} = F(a_1), \\ &\forall i \notin I_{\mathbf{x}}, a_{i+1} = x_i a_i \text{ et } \forall i \in I_{\mathbf{x}}, a_i^{-1} a_{i+1} \in \mathbf{T}_{\alpha_i^{\vee}}\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}} &= \{(a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbf{T}^{r+1} \mid a_{r+1} = F(a_1), \\ &\forall i \notin I_{\mathbf{x}}, a_{i+1} = x_i a_i \text{ et } \forall i \in I_{\mathbf{x}}, x_i a_i^{-1} a_{i+1} \in \mathbf{T}_{\alpha_i^{\vee}}\} \end{aligned}$$

et donc l'application

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{x}} : \mathbf{T}^{\mathbf{x}F} &\longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}} \\ t &\longmapsto (t, x_1 t, \dots, x_{r-1} \cdots x_1 t, x_r \cdots x_1 t) \end{aligned}$$

est bien définie (et est un morphisme de groupes injectif). D'autre part, si $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ est l'ensemble des $(z_1, \dots, z_r) \in (\mathbf{G}_m)^r$ tels que $z_i = 1$ si $i \notin I_{\mathbf{x}}$, alors l'application

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{x}} : \mathbf{R}_{\mathbf{x}} &\longrightarrow \mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}} \\ \mathbf{z} &\longmapsto (\gamma_1(\mathbf{z}), \dots, \gamma_{r+1}(\mathbf{z})) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes qui est bien défini et dont il est facile de vérifier que le noyau est fini (c'est $H_{I_{\mathbf{x}}}$). Donc son image est de dimension $|I_{\mathbf{x}}|$, ce qui est aussi la dimension de $\mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}}$ (voir [BoRo, page 17]). Donc

$$\mathbf{S}_{\mathbf{w},\mathbf{x}}^{\circ} = \text{Im}(\gamma_{\mathbf{x}}).$$

Mais la condition (*) est équivalente à dire que $\mu_{\mathbf{x}}(t) \in \text{Im}(\gamma_{\mathbf{x}})$. Le résultat découle alors de [BoRo, proposition 4.11 (4)]. La preuve du théorème 1.5 est complète.

RÉFÉRENCES

- [Bor] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics **126**, Second edition, Springer-Verlag, 1991.
- [BoRo] C. BONNAFÉ & R. ROUQUIER, *Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig*, Publ. Math. I.H.E.S. **97** (2003), 1-59.
- [DeLu] P. DELIGNE ET G. LUSZTIG, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103-161.
- [DiMiRo] F. DIGNE, J. MICHEL ET R. ROUQUIER, *Cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig*, Adv. Math. **209** (2007), 749-822.

[SGA1] A. GROTHENDIECK *et al.*, “SGA1 Revêtements étales et groupe fondamental”, Springer Lecture Notes in Math. **224**, 1971.

CÉDRIC BONNAFÉ : LABO. DE MATH. DE BESANÇON (CNRS: UMR 6623), UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ, 16 ROUTE DE GRAY, 25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE

Courriel : `cedric.bonnafe@univ-fcomte.fr`

RAPHAËL ROUQUIER : MATHEMATICAL INSTITUTE, UNIVERSITY OF OXFORD, 24-29 ST GILES', OXFORD, OX1 3LB, UK

Courriel : `rouquier@maths.ox.ac.uk`